Università degli Studi di Trieste

Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Magnitudo e Omologia della Magnitudo: Analisi di Alcuni Casi Specifici

Relatore:
Prof. Luca Manzoni

Correlatore:
Giuliamaria Menara

Laureando:
Michele Alessi

ANNO ACCADEMICO 2021–2022

"Nulla è più innaturale dell'ovvio."
Sir Arthur Conan Doyle

Introduzione

Questo lavoro vuole fornire al lettore gli strumenti necessari a comprendere il concetto di magnitudo e di omologia della magnitudo per grafi.
La nozione di magnitudo è recente, ed è stata introdotta nell'ambito della Teoria delle Categorie e poi specializzata su spazi metrici e grafi. È una nozione potenzialmente rivoluzionaria perchè permette di generalizzare i diversi concetti di *grandezza* di cui disponiamo in matematica. Molte proprietà di questo nuovo oggetto sono ancora da scoprire e in questo elaborato se ne vogliono indagare alcune.
L'omologia della magnitudo viene introdotta per *categorizzare* la magnitudo e negli ultimi anni se ne stanno studiando le principali proprietà .

Attraverso una serie di esempi si capirà l'importanza del concetto di magnitudo per spazi metrici; successivamente viene introdotta la magnitudo per grafi e vengono esposti i risultati originali ottenuti per grafi non pesati.
Si è analizzato il comportamento della magnitudo in presenza di cicli di ordine crescente e come conseguenza di ciò si propone una approssimazione per il calcolo diretto della magnitudo di un grafo non pesato.
Vengono poi introdotti i gruppi di omologia della magnitudo per un grafo. La parte finale è riservata a uno studio del comportamento di questi gruppi su grafi ottenuti come *unioni* di cicli.

Nel Capitolo 1 si fornisce un'intuizione sulla struttura dei gruppi di omologia per i complessi simpliciali, per consentire una comprensione adeguata del concetto di omologia della magnitudo.

Nel Capitolo 2 si introduce il concetto di magnitudo per spazi metrici e grafi, con particolare attenzione al caso dei grafi non pesati, per il quale si sono ottenuti alcuni risultati interessanti.

Nel Capitolo 3 si introduce l'omologia della magnitudo per i grafi: se ne descrive la struttura attraverso un parallelismo con l'omologia per complessi simpliciali e si discutono alcuni risultati numerici ottenuti su casi particolari.

Indice

1 Cenni alla teoria omologica **1**
- 1.1 Premessa . . . 1
- 1.2 Il primo gruppo di omologia . . . 2
  - 1.2.1 Cicli e 1-catene . . . 2
  - 1.2.2 Bordo e mappe di bordo . . . 3
  - 1.2.3 Celle e 2-catene . . . 4
  - 1.2.4 Costruzione del primo gruppo di omologia . . . 5
- 1.3 Il secondo gruppo di omologia . . . 6
- 1.4 Gruppi di omologia . . . 8

2 La magnitudo **13**
- 2.1 Il concetto di magnitudo . . . 13
- 2.2 Magnitudo per uno spazio metrico finito . . . 14
- 2.3 Magnitudo per un grafo . . . 19
  - 2.3.1 Grafi e spazi metrici . . . 21
  - 2.3.2 Il problema dei grafi pesati . . . 26
  - 2.3.3 Magnitudo e cicli . . . 28
  - 2.3.4 Una approssimazione per la magnitudo di G . . . 30

3 Omologia della magnitudo **33**
- 3.1 I gruppi di omologia della magnitudo . . . 33
- 3.2 Omologia della magnitudo e cicli . . . 36

Conclusione **41**

Appendice **43**

Bibliografia **48**

Capitolo 1

Cenni alla teoria omologica

1.1 Premessa

In questo capitolo, si cercano di fornire al lettore gli strumenti essenziali e l'intuizione geometrica alla base della teoria omologica per complessi simpliciali. Volutamente la trattazione è stata sviluppata in assenza di eccessivi formalismi, seguendo un approccio pratico; ci muoveremo nei primi due paragrafi analizzando una serie di esempi molto semplici ma contemporaneamente esplicativi. In seguito verrà fornita una definizione generale, ripresa da [1], cui si rimanda per maggiori dettagli.

Si è deciso di fornire queste basi, al fine di consentire al lettore una comprensione più agevole del Capitolo 3, dove verranno introdotti i gruppi di omologia della magnitudo per grafi. Infatti, la costruzione di questi ultimi prende largo spunto dalla costruzione dei gruppi di omologia che introdurremo nel presente capitolo, e nell'ottica di produrre un testo il più autocontenuto possibile, è parso doveroso inserire questa introduzione.

Tutto ciò che è riportato nel seguito, se non diversamente specificato, è riferito esclusivamente agli esempi di riferimento.

In questa sezione, saranno necessarie alcune nozioni di base sulla teoria dei grafi, per le quali si rimanda a [2] (Cap.1 e Cap.2) per tutto quello che non è diversamente specificato.
Saranno necessarie alcune nozioni di Teoria dei Gruppi, che non riportiamo e per le quali si rimanda a [1].

1.2 Il primo gruppo di omologia

1.2.1 Cicli e 1-catene

Consideriamo il seguente grafo orientato in figura 1.1, che chiamiamo X, avente tre vertici (x, y, z) e quattro lati (a, b, c, d):

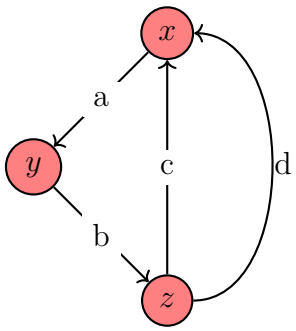


Figura 1.1: Grafo d'esempio X

Indicheremo la concatenazione di due lati con notazione addittiva; in tal modo, ad esempio, un cammino possibile con cui ci spostiamo dal nodo x al nodo z è dato da $a + b$.
Con il segno meno davanti, indicheremo un lato del grafo percorso in senso opposto rispetto alla sua orientazione.

Con questa notazione, possiamo individuare un cammino chiuso che inizia e termina in x dato dalla concatenazione: $a + b + c$.
Analogamente, abbiamo un cammino chiuso che inizia e termina in y dato da $b + c + a$ e un cammino chiuso che inizia e termina in z dato da $c + a + b$.
Chiaramente questi tre cammini chiusi ne identificano in realtà uno solo dal punto di vista geometrico. Tale cammino chiuso è quindi identificato da: $a + b + c = b + c + a = c + a + b$. In altre parole, non è importante il punto in cui inizia e finisce il cammino chiuso.
Più in generale, non farà differenza nemmeno l'ordine con cui scriviamo i lati nella concatenazione (consideriamo solo grafi orientati con ogni lato orientato in un unico modo), cosichè si avrà $a + b + c = b + a + c = c + b + a = ...$

Chiameremo questa espressione un ciclo, dal momento che rappresenta geometricamente un cammino chiuso nel grafo.
Nel nostro grafo, con le notazioni introdotte, sono presenti altri due cicli: $c - d$, $a + b + d$.
Diamo infine le seguenti due definizioni.

Definizione 1.2.1 *Sia C_0 il gruppo libero abeliano generato dai vertici x,y,z.*

Gli elementi di C_0 sono combinazioni formali intere di x, y, z, come per esempio $2x + 4y - z$. Chiameremo un elemento di C_0 una *0-catena*.

Definizione 1.2.2 *Sia C_1 il gruppo libero abeliano generato dai lati (orientati) a,b,c,d.*

Gli elementi di C_1 sono combinazioni formali intere di a, b, c, d, come per esempio $a + b + c$, $5a - 7b + d$. Chiameremo un elemento di C_1 una *1-catena*.

1.2.2 Bordo e mappe di bordo

Nel paragrafo precedente abbiamo definito in maniera euristica un ciclo come un'espressione algebrica che rappresenta un cammino chiuso nel grafo; vogliamo ora esprimere algebricamente il fatto che una certo elemento di C_1 sia un ciclo o meno.
Con riferimento al grafo del paragrafo precedente, definiamo come segue il bordo di ogni lato del grafo (che indicheremo usando il simbolo "∂_1").

- $\partial_1(a) = y - x$
- $\partial_1(b) = z - y$
- $\partial_1(c) = x - z$
- $\partial_1(d) = x - z$

In generale avremo: $\partial(lato)$ = vertice finale - vertice iniziale

Poichè a, b, c, d sono i generatori di C_1, possiamo estendere ∂_1 a omomorfismo di gruppo, e otteniamo così la seguente mappa:

$$\partial_1 : C_1 \longrightarrow C_0$$

Questa associa a un generico elemento di C_1 il seguente elemento di C_0:

$$\begin{aligned}\partial_1(\underbrace{\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d}_{\text{1-catena}}) &= \alpha\partial_1(a) + \beta\partial_1(b) + \gamma\partial_1(c) + \delta\partial_1(d) \\ &= \alpha(y - x) + \beta(z - y) + \gamma(x - z) + \delta(x - z) \\ &= \underbrace{(-\alpha + \gamma + \delta)x + (\alpha - \beta)y + (\beta - \gamma - \delta)z}_{\text{0-catena}}\end{aligned}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$.
Notiamo subito che con questa definizione abbiamo che

$$\partial_1(a + b + c) = (y - x) + (z - y) + (x - z) = 0$$

Abbiamo quindi un modo algebrico per capire se una certa espressione è un ciclo o no; possiamo dare la seguente:

Definizione 1.2.3 *Una 1-catena $c \in C_1$ è un ciclo se e solo se $\partial_1(c) = 0$*

Nel nostro grafo d'esempio, abbiamo che:

$$\partial_1(\underbrace{\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d}_{\text{generica 1-catena}}) = 0 \iff \begin{cases} -\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta - \gamma - \delta = 0 \end{cases}$$

Risolvendo quest'ultimo sistema usando l'algoritmo di Gauss, troviamo due parametri liberi e in particolare:

$$\begin{cases} \alpha = r + s \\ \beta = r + s \\ \gamma = r \\ \delta = s \end{cases}$$

Pertanto una base per il nucleo della matrice associata al sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che corrispondono rispettivamente ai cicli $a + b + c,\ a + b + d$.
Ciò significa che ogni altro ciclo del grafo è ottenibile da una opportuna combinazine lineare dei due generatori.
In particolare, il nucleo della mappa ∂_1 ha dimensione due ($ker\partial_1 =< a+b+c, a+b+d >$); notiamo che il nostro grafo ha due "buchi $1-$dimensionali", cosa che si riflette proprio nell'avere due generatori per i cicli.

1.2.3 Celle e 2-catene

Immaginiamo ora di modificare il nostro grafo come in figura 1.2, aggiungendo una cella bidimensionale tra i lati c e d, che chiameremo A. Otteniamo uno oggetto che chiamiamo X_2.

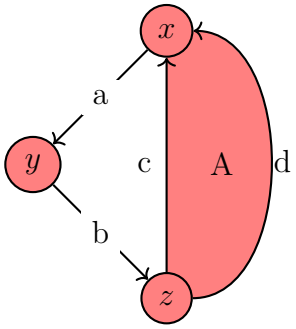


Figura 1.2: X_2

Orientiamo questa nuova cella in senso orario, e definiamo il bordo della cella A (che indicheremo con $\partial_2(A)$) nel seguente modo:

$$\partial_2(A) = c - d$$

In questo modo, il ciclo $c-d$, che è una 1-catena, diventa a sua volta il bordo $1-$dimensionale della cella $2-$dimensionale che abbiamo chiamato A.
Definiamo ora, analogamente a quanto fatto per vertici e lati, il gruppo libero delle celle $2-$dimensionali.

Definizione 1.2.4 *Sia C_2 il gruppo libero abeliano generato da A.*

Gli elementi di C_2 sono combinazioni formali intere di A, come per esempio $2A$, $-4A$. Chiameremo un elemento di C_2 una *2-catena*.

Poichè A è il generatore di C_2, possiamo estendere ∂_2 a omomorfismo di gruppo, e otteniamo così la seguente mappa:

$$\partial_2 : C_2 \longrightarrow C_1$$

Questa associa a un generico elemento di C_2 il seguente elemento di C_1:

$$\partial_2(\underbrace{\alpha A}_{\text{2-catena}}) = \alpha\partial_2(A) = \alpha(c-d) = \underbrace{\alpha c - \alpha d}_{\text{1-catena}}$$

con $\alpha \in \mathbb{Z}$.

1.2.4 Costruzione del primo gruppo di omologia

La cella A che abbiamo aggiunto, fa sì che $c-d$, pur essendo ancora un ciclo, non rappresenti più un "buco $1-$dimensionale" all'interno del nostro grafo

modificato.
Infatti, la presenza della cella A rende il ciclo $c - d$ omotopo a 0.
Si procede allora quozientando il gruppo dei cicli 1−dimensionali (generato dai cicli $a + b + c$, $a + b + d$) con il sottogruppo dei bordi 1−dimensionali, ossia il sottogruppo di C_1 generato dalle 1-catene che sono il bordo di una qualche cella 2−dimensionale. Formalmente:

Definizione 1.2.5 *Sia* $Z_1 = \{c \in C_1 : \partial_1(c) = 0\} = ker\partial_1 \subseteq C_1$ *il sottogruppo dei cicli* 1−*dimensionali.*

Definizione 1.2.6 *Sia* $B_1 = \{c \in C_1 : \exists C \in C_2 : \partial_2(C) = c\} = \mathrm{Im}\,\partial_2 \subseteq C_1$ *il sottogruppo dei bordi* 1−*dimensionali.*

Il primo gruppo di omologia per il nostro grafo modificato, non sarà quindi costituito dal gruppo dei soli cicli, ma sarà quello che otterremo prendendo i cicli e quozietando rispetto a quei cicli che sono il bordo di qualche cella 2−dimensionale.
Pertanto il primo gruppo di omologia del nostro grafo modificato X_2, che indicheremo con $H_1(X_2)$, è definito così :

Definizione 1.2.7 $H_1(X_2) = {}^{Z_1}\!/_{B_1}$ *dove* $Z_1 = \{$*cicli* 1−*dimensionali*$\}$ *e* $B_1 = \{$*bordi* 1−*dimensioanli* $\}$

Esplicitamente, Z_1 è generato da $< a + b + c, a + b + d >$ e B_1 è generato da $< c - d >$; fare il quoziente ${}^{Z_1}\!/_{B_1}$, corrisponde a porre $c - d = 0$.
Così facendo, otteniamo che $a + b + c = a + b + d$, da cui ricaviamo che H_1 è in realtà generato da un solo ciclo, rappresentato da $a + b + c$.
Ciò riflette il fatto che nel grafo modificato, avendo "riempito un buco", è rimasto un solo "buco 1−dimensionale", rappresentato algebricamente dall'unico generatore del primo gruppo di omologia.
Nota bene: il gruppo dei cicli 1−dimensionali corrisponde al gruppo generato dai generatori del nucleo della mappa ∂_1, mentre il gruppo dei bordi 1−dimensionali corrisponde all'immagine della mappa ∂_2.
Possiamo scrivere quindi in maniera più compatta:

$$H_1 = {}^{ker\partial_1}\!/_{\mathrm{Im}\,\partial_2}$$

1.3 Il secondo gruppo di omologia

Si può continuare a modificare il grafo usato finora, immaginando di curvare "verso l'alto" la cella A e introducendo una cella B curvata "verso il basso",

in modo da ottenere un "buco 2−dimensionale" come mostrato nella seguente figura 1.3.

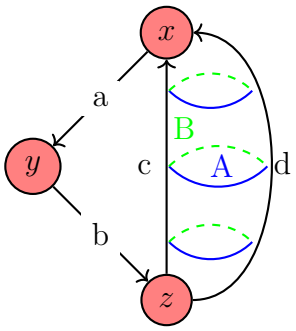


Figura 1.3: X_3

Orientiamo le celle A e B in modo che si abbia:

$$\partial_2(A) = \partial_2(B) = c - d.$$

Inoltre, la porzione di spazio racchiusa dalle celle A e B è "vuota", e idealmente potremmo "riempirla" inserendo in questo spazio vuoto una cella 3−dimensionale C.

Definizione 1.3.1 *Sia C_3 il gruppo libero abeliano generato da C.*

Gli elementi di C_3 sono combinazioni formali intere di C, come per esempio $5C$, $-36C$. Chiameremo un elemento di C_3 una *3-catena*.

Supponiamo dunque di inserire tale cella, in modo da riempire lo spazio vuoto tra A e B. Definiamo

$$\partial_3 : C_3 \longrightarrow C_2$$

in modo che

$$\partial_3(C) = A - B$$

Abbiamo a disposizione il seguente diagramma:

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

Per quanto riguarda C_0 e C_1, questi gruppi non sono cambiati rispetto a X_2. Pertanto anche $H_1(X_3) = H_1(X_2)$, con $H_1(X_3) = {}^{\ker \partial_1}/_{\mathrm{Im}\, \partial_2}$

Ora, $C_2 =< A, B >$ è il gruppo libero abeliano generato da A e B, costituito dalle combinazioni formali intere del tipo $\alpha A + \beta B$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Quello che cambia rispetto a X_2 è che ora abbiamo un "ciclo" in C_2, ossia la mappa ∂_2 ha un nucleo non banale.

Infatti, considerando $A - B \in C_2$ si ha che:

$$\partial_2(A - B) = \partial_2(A) - \partial_2(B) = (c - d) - (c - d) = 0$$

e quindi $\ker(\partial_2) =< A - B >$.
Definiamo ora, analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, i seguenti sottogruppi di C_2.

Definizione 1.3.2 *Sia* $Z_2 = \{c \in C_2 : \partial_2(c) = 0\} = ker\partial_2 \subseteq C_2$ *il sottogruppo dei cicli* $2-$*dimensionali.*

Un elemento $c \in Z_2$ è una $2-$catena che è un ciclo, ossia $c \in \ker \partial_2$.

Definizione 1.3.3 *Sia* $B_2 = \{c \in C_2 : \exists C \in C_3 : \partial_3(C) = c\} = \operatorname{Im} \partial_3 \subseteq C_2$ *il sottogruppo dei bordi* $2-$*dimensionali.*

Un elemento $c \in B_2$ è una $2-$catena che è il bordo di un qualche elemento di C_3.

Infine, definiamo il secondo gruppo di omologia.

Definizione 1.3.4 $H_2(X_3) = {}^{\ker \partial_2}/_{\operatorname{Im} \partial_3}$

Nel nostro caso, $\ker \partial_2 =< A - B >$ mentre $\operatorname{Im} \partial_3 =< A - B >$. Pertanto il quoziente, ossia il secondo gruppo di omologia per X_3, è il gruppo banale, rilfettendo il fatto che non è presente un "buco $2-$dimensionale" - infatti, il "buco $2-$dimensionale" sarebbe stato presente se non l'avessimo riempito con l'aggiunta della cella $3-$dimensionale C.

Se decidessimo di non aggiungere la cella C, allora C_3 sarebbe il gruppo banale e in particolare $\operatorname{Im} \partial_3$ sarebbe il solo elemento neutro. Avremmo pertanto il quoziente tra $\ker \partial_2 =< A - B >$ e $\operatorname{Im} \partial_3 = \{0\}$, che corrisponde a un gruppo generato da $< A - B >$. Tale unico generatore rifletterebbe il fatto che, non essendoci la cella C, vi sarebbe effettivamente un "buco $2-$dimensionale" compreso tra le celle $2-$dimensionali A e B.

1.4 Gruppi di omologia

Abbiamo esposto l'idea generale alla base dei gruppi di omologia: quale proprietà di un complesso simpliciale vogliamo che essi catturino e per quale motivo vengono definiti come quoziente di due precisi sottogruppi.

Definizione 1.4.1 *Dato un insieme di $n+1$ punti $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, tale insieme viene detto geometricamente indipendente se le equazioni*

$$\sum_{i=0}^{n} t_i = 0$$

e

$$\sum_{i=0}^{n} t_i x_i = 0$$

implicano $t_i = 0$ per ogni i.

Definizione 1.4.2 *Definiamo l' $n-$simplesso generato da $x_0, ..., x_n$ come:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^{n} t_i x_i,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i =\geq 0\}$$

Indicherremo l' $n-$simplesso appena definito con $x_0 x_1 ... x_n$.

Consideriamo il simplesso $\sigma = x_0 x_1 ... x_n$.

- Chiameremo $x_0, ..., x_n$ i vertici di σ.
- n è la dimensione di σ, indicata con dim σ.
- se $\{x_{i_0}, ..., x_{i_k}\} \subseteq \{x_0, ..., x_n\}$, $x_{i_0} ... x_{i_k}$ è una faccia di dimensione k di σ.
- una faccia di σ si dice propria se non coincide con σ
- il bordo di σ, $\partial\sigma$, è l'unione delle facce proprie di σ.

Definizione 1.4.3 *Un complesso simpliciale K in $\mathbb{R}^n$ è un insieme di simplessi in $\mathbb{R}^n$ tali che:*

(i) se $\sigma \in K$ allora ogni faccia di $\sigma \in K$.

(ii) se $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ e $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ allora $\sigma_1 \cap \sigma_2$ è una faccia di σ_1 e di σ_2.

Definizione 1.4.4 *Sia σ un simplesso. Diremo che due orientazioni dei suoi vertici sono equivalenti se differiscono per una permutazione pari.*

Se dim $\sigma > 0$, vi sono due classi di equivalenza e ognuna di queste classi è detta orientazione di σ.
Se dim $\sigma = 0$, vi è una sola orientazione per σ.
Un simplesso orientato è un simplesso con una sua orientazione fissata.
Indicheremo con $[x_0, ..., x_n]$ il simplesso $x_0...x_n$ con l'orientazione indotta dall'ordinamento di $x_0...x_n$.

Sia K un complesso simpliciale.

1. Sia $W = \{k-$simplessi orientati di K$\}$ l'iniseme dei simplessi $k-$dimensionali di K orientati.
2. Sia $N =< \sigma + \sigma' : \sigma, \sigma'$ sono lo stesso simplesso, con orientazione opposta $>$. Con $< >$ intendiamo *"il sottogruppo generato da"*.
3. Sia G il gruppo libero abeliano generato da W.

Definizione 1.4.5 *Il gruppo delle catene di dimensione k (o $k-$catene) orientate di K è :*

$$C_k(K) = {}^{G}/_{N}$$

Nota bene: si dimostra che effetivamente $C_k(K)$ è un gruppo libero abeliano.
Questi gruppi corrispondono ai gruppi che nell'esempio introduttivo avevamo chiamato C_0, C_1, C_2, C_3.

Definizione 1.4.6 *Definiamo la mappa di bordo $k-$esima*

$$\partial_k : C_k(K) \longrightarrow C_{k-1}(K)$$

in modo che

$$\partial_k([x_0, ...x_k]) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_k]$$

dove $[x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_k] = [x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k]$

Si può dimostrare che ∂_k è omomorfismo di gruppi e vale

$$\partial_k([x_0, ..., x_k]) = (-1)^{sgn(\mu)} \partial_k([x_{\mu(0)}, ..., x_{\mu(k)}])$$

dove μ è una permutazione di $x_0, ..., x_k$.

Lemma 1.4.1 $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}\circ\partial_k([x_0,...x_k]) &= \partial_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[x_0,...,\hat{x_i},...,x_k]\right)\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\Bigg(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j[x_0,...,\hat{x_j},...,\hat{x_i},...,x_k]+\\
&\sum_{j=i+1}^{k}(-1)^{j-1}[x_0,...,\hat{x_i},...,\hat{x_j},...,x_k]\Bigg)\\
&=\sum_{0\le j<i\le k}(-1)^{j+i}[x_0,...,\hat{x_j},...,\hat{x_i},...,x_k]+\\
&\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{j+i-1}[x_0,...,\hat{x_i},...,\hat{x_j},...,x_k]\\
&=\sum_{0\le j<i\le k}(-1)^{j+i}[x_0,...,\hat{x_j},...,\hat{x_i},...,x_k]-\\
&\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{j+i}[x_0,...,\hat{x_i},...,\hat{x_j},...,x_k]\\
&=0
\end{aligned}$$

□

Definiamo ora il $k-$esimo gruppo di omologia per K, evidenziando l'importanza del lemma appena dimostrato.
Consideriamo:

$$C_k(K)\xrightarrow{\partial_k}C_{k-1}(K)\xrightarrow{\partial_{k-1}}C_{k-2}(K)$$

Poichè $\partial_{k-1}\circ\partial_k=0$ allora $\operatorname{Im}\partial_k\subseteq\ker\partial_{k-1}$ e pertanto ${}^{ker\partial_{k-1}}/_{\operatorname{Im}\partial_k}$ è ben definito come quoziente.

Definizione 1.4.7 *$H_k(K)$, il $k-$esimo gruppo di omologia di K, è*

$$H_k(K):={}^{\ker\partial_k}/_{\operatorname{Im}\partial_{k+1}}$$

Concludiamo il capitolo evidenziando il seguente fatto: ogni volta che si dispone di una successione di gruppi liberi abeliani G_k e di mappe ∂_k tali che $\partial_{k-1}\circ\partial_k=0$, si ha un "complesso di catene" (G_k,∂_k) che rappresenteremo con

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{k+1}}G_k\xrightarrow{\partial_k}G_{k-1}\xrightarrow{\partial_{k-1}}\cdots$$

e si potrà costruire una teoria omologica definendo il $k-$esimo gruppo di omologia analogamente a come fatto nella definizione 1.4.7.

Capitolo 2

La magnitudo

2.1 Il concetto di magnitudo

Perchè introduciamo il concetto di magnitudo? In questo paragrafo motiviamo l'importanza di tale concetto.
In matematica, molte classi di oggetti che vengono introdotte dispongono di una precisa nozione di grandezza.
Nella teoria degli insiemi, ad esempio, abbiamo il concetto di cardinalità . Inoltre, una volta definita la cardinalità di un insieme X, che indicheremo con $|X|$, valgono le seguenti:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$|X \times Y| = |X||Y|$$

dove X, Y sono insiemi con un numero finito di elementi.

In $\mathbb{R}^n$ disponiamo del concetto di volume (in particolare, la misura di un certo sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$). In $\mathbb{R}^n$ vale:

$$\lambda(X \cup Y) = \lambda(X) + \lambda(Y) - \lambda(X \cap Y)$$

$$\lambda(X \times Y) = \lambda(X)\lambda(Y)$$

dove λ denota la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ e X, Y sono insiemi di misura finita.

In topologia abbiamo la caratteristica di Eulero per spazi topologici, definita in questo modo:

$$\chi(X) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + ...$$

dove $b_i = rank H_i(X)$, con $H_i(X)$ l'$i-$esimo gruppo di omologia di X.
Anche in questo caso, sotto opportune ipotesi, la caratteristica di Eulero soddisfa:

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$$
$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$$

dove X, Y sono sottoinsiemi di uno spazio topologico Z.

Il concetto di magnitudo viene introdotto per generalizzare la nozione di "grandezza"; in particolare si vuole trovare una definzione che includa le precedenti e non solo.
Effettivamente si è riusciti nell'intento, introducendo la magnitudo nel contesto della Teoria delle Categorie. In questa sede non siamo interessati ai dettagli della definizione, e nemmeno al complesso mondo categoriale: ci concentreremo invece sui risvolti che questa nuova nozione ha sugli spazi metrici e sui grafi.

2.2 Magnitudo per uno spazio metrico finito

Sia (X, d) uno spazio metrico finito, $X = \{x_1, ..., x_n\}$.
Sia Z_X una matrice tale che:

$$(z_{ij}) = e^{-d(x_i, x_j)}$$

con $x_i, x_j \in X$ e $i, j \in \{1, ..., n\}$

Definizione 2.2.1 *Se Z_X è invertibile, la magnitudo di X, indicata con $|X|$, è :*

$$|X| := \sum_{x_i, x_j \in X} {Z_X}^{-1}(x_i, x_j)$$

cioè la somma su tutti i coefficienti dell'inversa di Z_X.

Osservazione 2.2.1 *Nel seguito ci interesseremo allo studio dei casi ove Z_X è invertibile. I casi generali sono trattati in [3].*

Avendo a disposizione questa definizione operativa di magnitudo, valida per gli spazi metrici finiti, cerchiamo di indagare attraverso un paio di esempi il significato geometrico di questa nuova misura introdotta.

Esempio 2.2.1 *Sia* $X \subset \mathbb{R}, X = \{-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\}$ *con* $d > 0,\ d \in \mathbb{R}$. *Siamo in una situazione del tipo in figura 2.1.*

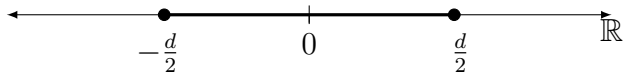


Figura 2.1: Due punti in $\mathbb{R}$ a distanza d.

Denotando con Z *la matrice* Z_X *prima introdotta, si ha che:*

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & e^{-d} \\ e^{-d} & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto: $\det(Z) = 1 - e^{-2d} \neq 0$ *dal momento che* $d > 0$.
Vediamo che l'inversa di Z *è :*

$$Z^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-2d}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-d} \\ -e^{-d} & 1 \end{pmatrix}$$

Usando la definizione di magnitudo per X*, abbiamo che:*

$$\begin{aligned} |X| &= \frac{1 - e^{-d} - e^{-d} + 1}{1 - e^{-2d}} \\ &= \frac{2(1 - e^{-2d})}{1 - e^{-d}} \\ &= \frac{2}{1 + e^{-d}} \end{aligned}$$

Immediatamente si osserva che:

1. *se* $d \to 0 \Longrightarrow |X| \to 1$

2. *se* $d \to \infty \Longrightarrow |X| \to 2$

Riassumiamo il comportamento di $|X|$ *nel grafico di figura 2.2.*

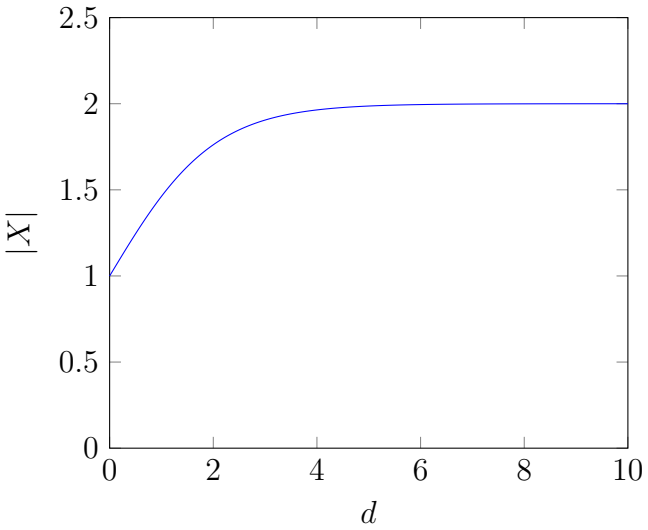


Figura 2.2: Magnitudo di X al variare di d

Esempio 2.2.2 *Consideriamo ora un caso lievemente più complesso.*
Sia $d > 0,\ d \in \mathbb{R}$ *e siano* $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ *con* $A = (0,0),\ B = (d\sqrt{100^2 - \frac{1}{4}}, \frac{d}{2}),\ C = (d\sqrt{100^2 - \frac{1}{4}}, -\frac{d}{2})$, *come in figura 2.3.*
In questo modo:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= 100d \\ d(A,C) &= 100d \\ d(B,C) &= d \end{aligned}$$

Poniamo $a = e^{-100d}$ *e* $b = e^{-d}$. *La matrice* Z *diventa:*

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \det(Z) &= \begin{vmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & a \\ b & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \\ &= 1 - b^2 + 2a(ab - a) = (1-b)(1+b-2a^2) \end{aligned}$$

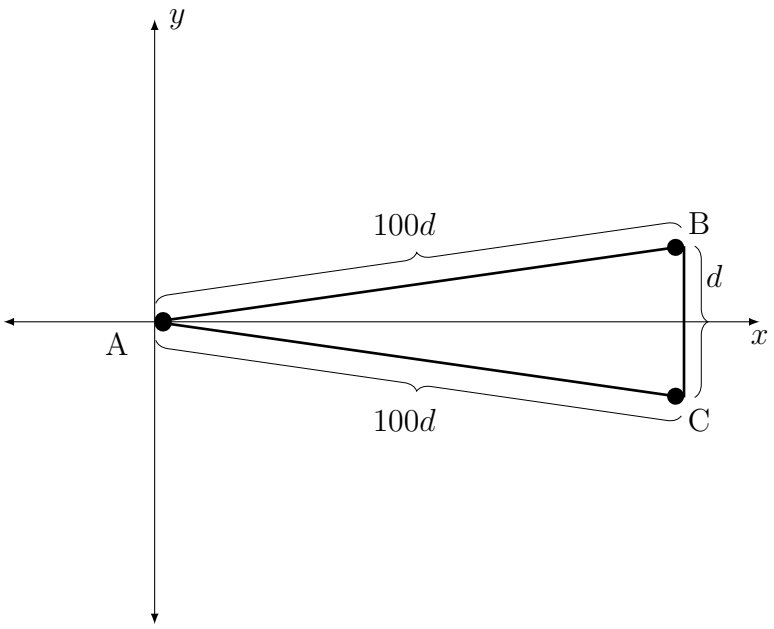


Figura 2.3: Tre punti in $\mathbb{R}^2$ disposti in modo che due di questi siano a distanza molto inferiore tra loro rispetto alla distanza di ognuno di questi due dal terzo punto.

Usando ora i minori utilizzati per calcolare il determinante, possiamo calcoalre subito anche l'inversa di Z con la matrice dei cofattori:

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= \frac{1}{(1-b)(1+b-2a^2)} \begin{pmatrix} 1-b^2 & -a(1-b) & -a(1-b) \\ -a(1-b) & 1-a^2 & a^2-b \\ -a(1-b) & a^2-b & 1-a^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+b-2a^2} \begin{pmatrix} 1+b & -a & -a \\ -a & \frac{1-a^2}{1-b} & \frac{a^2-b}{1-b} \\ -a & \frac{1-a^2}{1-b} & \frac{a^2-b}{1-b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la magnitudo per $|X|$.

$$\begin{aligned} |X| &= \frac{1}{1+b-2a^2} \left(\frac{2-2a^2+2a^2-2b}{1-b} - 4a + 1 + b \right) \\ &= \frac{3-4a+b}{1+b-2a^2} \\ &= \frac{3-4e^{-100d}+e^{-d}}{1+e^{-d}-2e^{-200d}} \end{aligned}$$

Analizzando l'espressione ottenuta per la magnitudo di $|X|$ in funzione di d, troviamo le seguenti stime:

1. *se* $d \to 0 \Longrightarrow |X| \to 1$
2. *se* $d \to \infty \Longrightarrow |X| \to 3$
3. *se* $d \sim 1 \Longrightarrow |X| \sim 2$

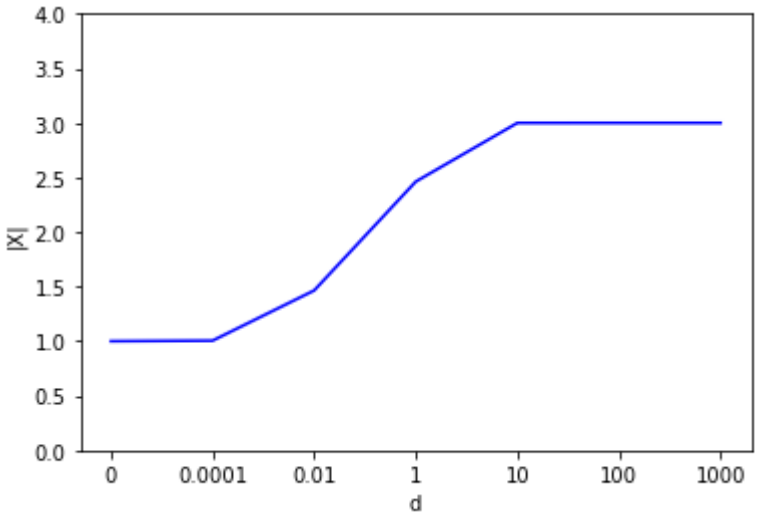


Figura 2.4: Magnitudo di X al variare di d

Dalla figura 2.3 si capisce geometricamente che se $d \to 0$*, i tre punti "collassano" in un unico punto; se* d *è moderato, i punti* B *e* C *appaiono molto vicini e ben separati da* A*, e quindi di fatto vediamo* 2 *punti; se invece* d *è molto grande, distinguiamo effettivamente i tre punti distinti* A*,*B *e* C*.*

Gli esempi 2.2.1 e 2.2.2 forniscono uno spunto su cosa riesca a catturare la magitudo di uno spazio metrico. Osserviamo infatti che tenere traccia del valore di $|X|$ al variare di un riscalamento delle distanze nello spazio metrico, ci porta molte più informazioni di quante ce ne dia, ad esempio, la sola cardinalità di X.

Essendo indicativo per uno spazio metrico osservare come varia la magnitudo riscalando la distanza, spesso è utile introdurre la "funzione magnitudo".

Definizione 2.2.2 *Sia (X, d) uno spazio metrico finito, $t \in (0, +\infty)$. Con tX denotiamo lo spazio metrico con gli stessi elementi di X e distanza data da:*

$$d_{tX}(x, y) = td(x, y)$$

con $x, y \in X$.

Definizione 2.2.3 *Sia (X, d) uno spazio metrico finito. La funzione magnitudo di X è una funzione $t \mapsto |tX|$, definita per ogni t tale che per tX è definita la mangitudo.*

Osservazione 2.2.2 *Sia (X, d) spazio metrico; consideriamo (tX, d_{tX}). Allora la matrice Z_{tX} avrà coefficienti del tipo*

$$(z_{ij}) = e^{-td(x_i, x_j)}$$

con $t \in (0, +\infty)$.

Si può inoltre dimostrare che vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.2.3 *([3], Proposizione 2.2.6) Sia (X, d) spazio metrico finito. Allora*

$$\lim_{t \to \infty} |tX| = card(X)$$

dove $|\cdot|$ indica la magnitudo e $card(\cdot)$ indica la cardinalità .

Alla luce di quanto osservato finora, diremo informalmente che la magnitudo di uno spazio metrico è una grandezza in grado di *contare il numero effettivo di punti nello spazio*, relativamente a un certo parametro.

2.3 Magnitudo per un grafo

Nel seguito, le nozioni sui grafi non specificate seguono le definizioni di [2], come nel precedente capitolo.
Dopo aver introdotto la magnitudo per uno spazio metrico, vogliamo dare una definizione che sia valida per un grafo $G = (V, E)$, dove V è l'insieme dei nodi del grafo e E è l'insieme degli archi del grafo. Scriveremo $x \in G$ intendendo $x \in V$. Nel seguito per "grafo G" intenderemo un grafo finito non orientato, senza loop (ossia senza archi che iniziano e terminano in uno stesso nodo) e senza archi multipli (ossia: tra due nodi vi è al massimo un arco).

Definizione 2.3.1 *Dati due nodi x e y di un grafo G, con $d_G(x,y)$ indicheremo la lunghezza del cammino minimo tra x e y, se questo cammino esiste. Altrimenti, poniamo $d_G(x,y) = \infty$.*

Se x e y sono due nodi vicini, avremo $d_G(x,y) = 1$. Dalla definizione segue che $d_G(x,y) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ per ogni $x, y \in G$.
Si verifica che tale definizione induce una metrica sull'insieme V dei nodi di G. Pertanto dato G un grafo, equipaggiando l'insieme dei suoi nodi V con la distanza d_G, abbiamo che d_G è una metrica su V. Tale sapzio metrico verà denotato con (V, d_G).

Introduciamo ora le seguenti nozioni di algebra polinomiale, tratte da [6].

Teorema 2.3.1 *Per ogni dominio di integrità R, esiste un campo $Frac(R)$ che contiene R come sottoanello. Inoltre, ogni elemento $q \in Frac(R)$ si fattorizza come*

$$q = ab^{-1}$$

con $a, b \in R$ e $b \neq 0$.

Definizione 2.3.2 *Se R è un dominio di intergità , $Frac(R)$ è chiamato campo delle frazioni di R.*

Ad esempio, $\mathbb{Q} = Frac(\mathbb{Z})$.
Se K è un campo, allora $Frac(K[x])$ è chiamato il campo delle funzioni razionali su K, e si scrive

$$Frac(K[x]) = K(x).$$

Gli elementi di $K(x)$ sono della forma $f(x)/g(x)$, con $f(x), g(x) \in K[x]$ e $g(x) \neq 0$.

Ora, l'idea alla base della definizione di magnitudo per un grafo G si basa proprio sulla possibilità di vedere G come uno spazio metrico. Usando l'osservazione 2.2.2 e il fatto che $d_G(x,y) \in \mathbb{N}$, avremo che la magnitudo $|tG|$ sarà una funzione razionale su $\mathbb{Q}$ di $q := e^{-t}$, poichè avremo che i coefficienti della matrice che definisce la magnitudo diventano polinomi nell'indeterminata q.

La definizione formale di magnitudo per un grafo G viene fornita in [4], e la costruzione proposta è la seguente. Indichiamo con $\mathbb{Z}[q]$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi nell'indetermninata q. Sia $Z_G = Z_G(q)$ la matrice

quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}[q]$ le cui righe e colonne sono indicizzate sui nodi del grafo G e le cui entrate (x, y) sono date da

$$Z_G(q)(x, y) = q^{d(x,y)}$$

per ogni $x, y \in G$. Per convenzione poniamo $q^\infty = 0$.
Ora, notiamo che $Z_G(0) = \mathbb{I}d$ è la matrice identica, e pertanto $\det Z_G(0) = 1$. Quindi, il polinomio $\det Z_G(q)$ ha come termine noto 1.
In particolare $\det Z_G(q)$ è non nullo nel campo $\mathbb{Q}(q)$ delle frazioni razionali a coefficienti in $\mathbb{Q}$, e pertanto ivi invertibile. Questo ci garantisce che la magnitudo per un grafo G esiste sempre come elemento di $\mathbb{Q}(q)$ (si ricordi infatti che la magnitudo per uno spazio metrico X era definita solo se la matrice Z_X era invertibile).

Definizione 2.3.3 *La magnitudo di un grafo G è*

$$|G| = \sum_{x,y \in G} (Z_G(q))^{-1}(x, y) \in \mathbb{Q}(q)$$

.

2.3.1 Grafi e spazi metrici

In questa sezione analizziamo il legame presente tra grafi non pesati e gli spazi metrici indotti da questo tipo di grafi; useremo il risultato ottenuto nelle prossime sezioni.

Sia G un grafo. Supponiamo che i nodi di G siano $1, ..., N$, ossia $V = \{1, ..., N\}$. Per prima cosa osserviamo che associare a G lo spazio metrico (V, d_G) consiste, di fatto, nell'ottenere la matrice D delle distanze del grafo G, definita da

$$(d_{ij}) = d_G(i, j)$$

per ogni $i, j \in G$.
Questo è vero dal momento che l'informazione che uno spazio metrico finito contiene è riassumibile nella seguente matrice simmetrica

$$D := \begin{pmatrix} d(1,1) & d(1,2) & \dots & d(1,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(N,1) & d(N,2) & \dots & d(N,N) \end{pmatrix}$$

Ottenere la matrice D partendo dal grafo G è possibile senza ulteriori ipotesi sul grafo G, ed è il procedimento che porta ad ottenere lo spazio metrico

(V, d_G). Operativamente, una possibile strada per calcolare D è utilizzare il seguente algoritmo 1:

Algorithm 1 Algoritmo per costruire la matrice D del grafo G.

Require: A matrice di adiacenza di G
  $N \leftarrow card(V)$
  for $i = 1, ..., N$ **do**
    for $j = 1, ..., N$ **do**
      if $i \neq j$ **and** $A[i][j] = 0$ **then**
        $A[i, j] \leftarrow \infty$
      end if
    end for
  end for
  for $k = 1, ..., N$ **do**
    for $i = 1, ..., N$ **do**
      for $j = 1, ..., N$ **do**
        if $A[i][j] > A[i][k] + A[k][j]$ **then**
          $A[i][j] \leftarrow A[i][k] + A[k][j]$
        end if
      end for
    end for
  end for
  $D \leftarrow A$
  return D

Ora, la questione che ci poniamo diventa: è possibile ricavare la matrice di adiacenza di un grafo G partendo dalla matrice D delle sue distanze?

Teorema 2.3.2 *Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{M}$ l'insieme dei grafi non pesati e l'insieme degli spazi metrici indotti da grafi non pesati, rispettivamente.*
Allora $\mathcal{G}$ e $\mathcal{M}$ sono in biiezione.

Dimostrazione: Sia $G \in \mathcal{G}$. Sia $\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}$ tale che

$$G \mapsto D$$

attraverso algoritmo 1.
Proviamo che Φ è una biiezione.
"Φ è iniettiva"
Per provare l'iniettività di Φ, proveremo che la composizione $\Psi \circ \Phi$ è l'identità

e quindi in particolare è iniettiva.
Sia $\Psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{G}$ tale che

$$D \mapsto G$$

attraverso il seguente algoritmo 2.

Algorithm 2 Algoritmo 2

Require: D matrice delle distanze di (V, d_G)
  for $k = 1, ..., N$ **do**
    for $j = 1, ..., N$ **do**
      if $d(j,k) \neq 1$ **then**
        $D[k,j] \leftarrow 0$
      end if
    end for
  end for
  $A \leftarrow D$
  return A

Proviamo che

$$\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{G}} \tag{2.1}$$

Innanzitutto osserviamo che una matrice D che rappresenta uno spazio metrico in $\mathcal{M}$ ha la seguente prorietà : se $d_{ij} = 1$, allora i e j sono vicini poichè il grafo è non pesato.

Se G fosse pesato, potrei non avere alcun nodo intermedio tra i e j ma comunque $d(i,j) > 1$, come mostrato in figura 2.5.

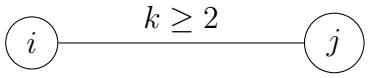


Figura 2.5: Nodi vicini con peso $k \geq 2$

Con algoritmo 2, ogni elemento diverso da 1 nella matrice D viene posto uguale a 0, e questo passaggio ci permette di ottenere, per ogni nodo del grafo, i suoi vicini. Infatti, usando che G non è pesato, se $1 < d(j,k)$ significa che vi è un nodo intermedio tra j e k, e dunque i e j non sono vicini. In questo modo, per ogni riga k della matrice D (che rappresenta le distanze del nodo k da ogni altro nodo del grafo) tengo traccia dei soli *vicini* del nodo $k-$esimo; ma questo significa proprio avere la matrice di adiacenza del grafo.
Per provare (2.1), consideriamo:

$$\mathcal{G} \xrightarrow[\Phi]{\text{Algoritmo 1}} \mathcal{M} \xrightarrow[\Psi]{\text{Algoritmo 2}} \mathcal{G}$$

Sia $G \in \mathcal{G}$. Vogliamo provare che $G' := \Psi(\Phi(G)) = G$. Sia A' la matrice di adiacenza di G'.
Per costruzione, se $a'_{ij} = 1,\ a'_{ij} \in A'$ allora $d_{ij} = 1,\ d_{ij} \in D$ dove D è la matrice delle distanze associata allo spazio metrico (V, d_G). Ma se $d_{ij} = 1$, poichè il grafo non è pesato, allora esiste un arco che connette i e j in G. Dal momento che si aveva $a'_{ij} = 1$, abbiamo che ogni qual volta esiste un arco tra i e j in G', esiste un corrispondente arco tra i e j in G.
Con analogo ragionamento fatto su $\Psi(\Phi(G'))$, otteniamo che ogni qual volta esiste un arco tra i e j in G, esiste un corrispondente arco tra i e j in G'. Pertanto $G = G'$.
"Φ è suriettiva"
Poiché $\mathcal{M}$ è l'insieme degli spazi metrici indotti da grafi non pesati, Φ è suriettiva per costruzione. □

Conseguenza

Abbiamo definito la magnitudo per uno spazio metrico (X, d) (Definizione 2.2.1) e per un grafo G (Definizione 2.3.3).
In questa sezione abbiamo dimostrato che i grafi G non pesati sono in biiezione con gli spazi metrici indotti da questi grafi.
Questo fatto ci permette di usare la definizione di magnitudo per spazi metrici direttamente su questo tipo di grafi; in particolare siamo in grado di associare ad ogni grafo non pesato un numero reale (la sua magnitudo). Dato $G = (V, E) \in \mathcal{G}$, consideriamo lo spazio metrico associatogli. Calcoliamo la magnitudo per questo spazio (V, d_G) usando la definizione per spazi metrici (che coinciderà con la valutazione del polinomio definito nella definizione di mangitudo per grafi in $q = e^{-1}$), e quando "torniamo indietro" all'insieme $\mathcal{G}$ abbiamo la garanzia che ritroviamo il grafo di partenza.

Osservazione 2.3.3 *Se G è pesato, non vale il teorema 2.3.2. Come discusso nella sezione successiva, ad infiniti grafi pesati corrisponde uno stesso spazio metrico.*

Osservazione 2.3.4 *Perchè siamo interessati a usare la definizione di magnitudo per spazi metrici sui grafi non pesati?*
Poter associare un numero a un grafo in maniera ben definita permette di sviluppare un'analisi sui cicli come fatto alla sezione 2.3.3, nella quale si trova un comportamento interessante della magnitudo. In futuro sarebbe interessante implementare ciò computando la funzione mangitudo per un grafo per vedere se si riesce a classificare delle classi di grafi.

Riportiamo infine un esempio di come funziona operativamente l'algoritmo 2.

Esempio 2.3.1 *Il grafo G di figura 2.6 genera lo spazio metrico (V, d) con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e*

$$d(1,2) = 1,\ d(1,3) = 1,\ d(1,4) = 2,\ d(1,5) = 2$$
$$d(2,3) = 1,\ d(2,4) = 2,\ d(2,5) = 2$$
$$d(3,4) = 1,\ d(3,5) = 1$$
$$d(4,5) = 2$$

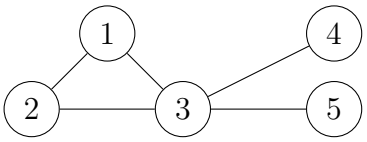


Figura 2.6: Grafo G

Usando l'algoritmo 2:
Sia $k = 1$. Per $j = 2, ..., 5$

$$d(1,2) = 1 \rightarrow \textit{Connetto 1 a 2}$$
$$d(1,3) = 1 \rightarrow \textit{Connetto 1 a 3}$$
$$d(1,4) = 2 \rightarrow \textit{Non faccio niente}$$
$$d(1,5) = 2 \rightarrow \textit{Non faccio niente}$$

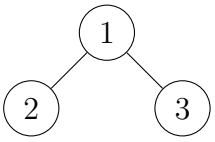


Figura 2.7: Passo 1

Sia $k = 2$. Per $j = 3, ..., 5$

$$d(2,3) = 1 \rightarrow \textit{Connetto 2 a 3}$$
$$d(2,4) = 2 \rightarrow \textit{Non faccio niente}$$
$$d(2,5) = 2 \rightarrow \textit{Non faccio niente}$$

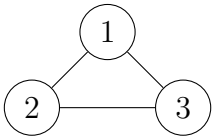


Figura 2.8: Passo 2

Sia $k = 3$. *Per* $j = 4, 5$

$d(3,4) = 1 \rightarrow$ *Connetto 3 a 4*
$d(3,5) = 1 \rightarrow$ *Connetto 3 a 5*

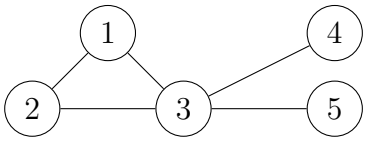


Figura 2.9: Passo 3

Sia $k = 4$. *Per* $j = 5$

$d(4,5) = 2 \rightarrow$ *Non faccio niente*

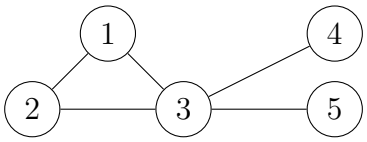
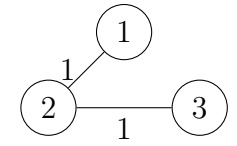


Figura 2.10: Passo 4, ritroviamo G

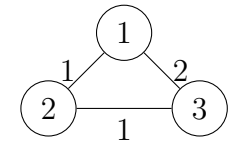
2.3.2 Il problema dei grafi pesati

In questa sezione analizzeremo brevemente il motivo per cui il teorema 2.3.2 fallisce se G è pesato.

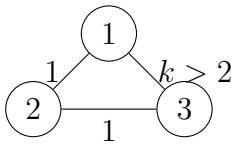
Quando considero un grafo pesato $G = (V, E)$, non è vero in generale che lo spazio metrico generato da G individua univocamente un solo grafo; anzi può individuarne infiniti. La seguente figura chiarirà subito il motivo di questo fatto.



$$X = \{1, 2, 3\},\ \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$X = \{1, 2, 3\},\ \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$X = \{1, 2, 3\},\ \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.11: Grafi pesati e spazi metrici

Abbiamo $V = \{1, 2, 3\}$, mentre i coefficienti della matrice D sono:

$$d_G(1, 2) = 1,\ d_G(1, 3) = 2$$
$$d_G(2, 3) = 1.$$

A questo spazio metrico (V, d_G) corrsipondono infiniti grafi pesati. Allo stesso (V, d_G) corrisponde invece il solo grafo **non** pesato:

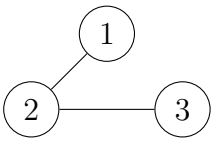
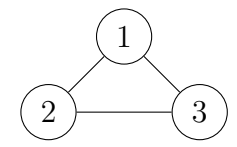


Figura 2.12: Grafo non pesato

Se aggiungessimo l'arco che connette 1 a 3, avremmo la seguente situazione:



$$X = \{1, 2, 3\},\ \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.13: Aggiunta di un ciclo in un grafo non pesato

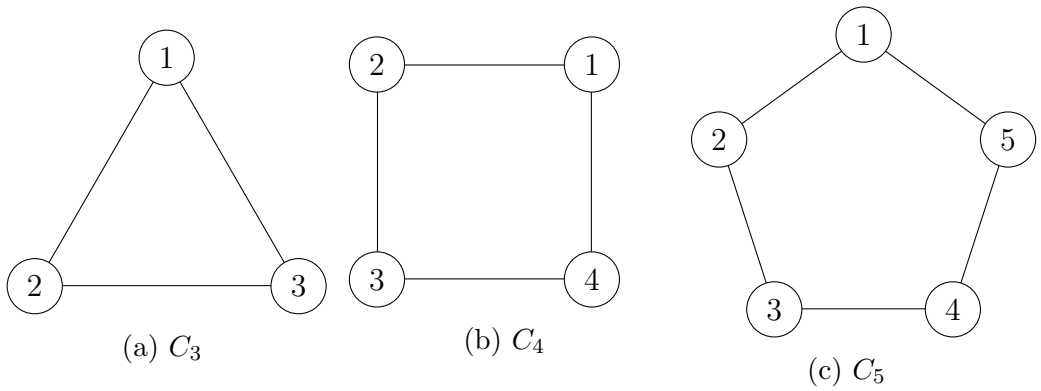
Concludendo, se G è pesato, è possibile avere cicli senza alterare la matrice delle distanze. Se G non è pesato, questo non è possibile.

2.3.3 Magnitudo e cicli

L'obiettivo di questa sezione è indagare come si comporta la magnitudo di un grafo G non pesato in presenza di cicli.
Questo problema è stato studiato numericamente, e di seguito si esporranno i risultati ottenuti. Nel seguito per grafo G intenderemo ancora quanto definito all'inizio della sezione 2.3.

In un grafo G non pesato, i cicli più semplici che possiamo considerare sono quelli che otteniamo considerando i *grafi ciclici* C_n.

Figura 2.14: Grafi ciclici d'esempio.



(a) C_3 (b) C_4 (c) C_5

L'idea è quella di analizzare come varia la magnitudo in questo tipo di grafi rimuovendo un arco, e di conseguenza rimuovendo il ciclo. Il calcolo è stato fatto con ogni grafo ciclico con N fino a 200 (si veda l'Appendice per il calcolo della magnitudo di un grafo). Riassumiamo lo studio con i seguenti grafici in figura 2.15 e 2.16.

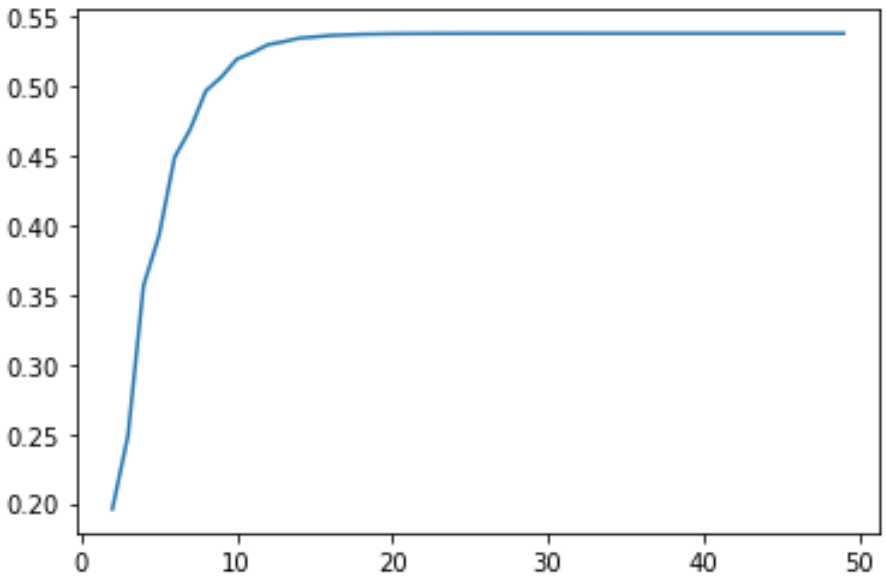


Figura 2.15: Comportamento asintotico della magnitudo sui grafi ciclici fino a $N = 50$.

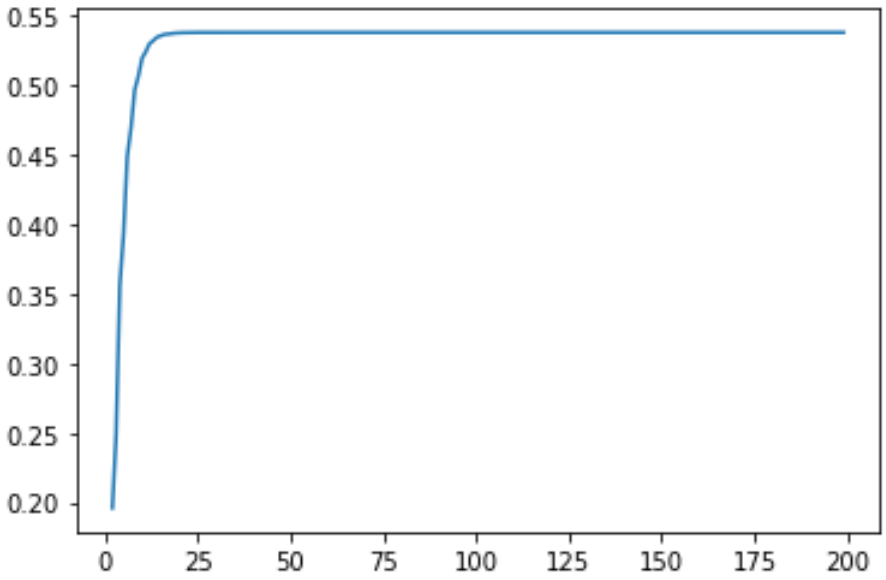


Figura 2.16: Comportamento asintotico della magnitudo sui grafi ciclici fino a $N = 200$.

Sull'asse delle ascisse troviamo il numero dei nodi che consideriamo. Sull'asse delle ordinate invece abbiamo il *gap* tra la magnitudo per C_n e la

magnitudo per C_n a cui è stato rimosso un arco.
Si osservi il comportamento asintotico: quando N diventa abbastanza grande ($N \geq 20$), dal punto di vista del calcolo della magnitudo non vi è più differenza nel considerare cicli di lunghezze diverse.

L'analisi della magnitudo per cicli porta a congetturare la formula, enunciata nella successiva sezione 2.3.4, per il calcolo della magnitudo di un grafo con N nodi e avente cicli disgiunti.
Per cicli disgiunti intendiamo dei cicli (di qualunque lunghezza) che non hanno archi in comune, come mostrato nelle figure 2.17 e 2.18.

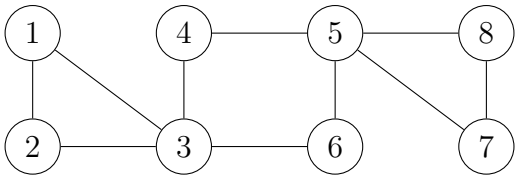


Figura 2.17: Grafo con cicli disgiunti, avente due cicli di lunghezza 3 e un ciclo di lunghezza 4.

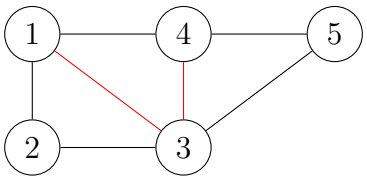


Figura 2.18: Grafo con 3 cicli di lunghezza 3: in rosso gli archi in comune ai cicli di lunghezza 3.

2.3.4 Una approssimazione per la magnitudo di G

Quanto esposto alla sezione precedente ha portato a cercare di sfruttare questo risultato sui cicli, seppur empirico, per ottenere un'approssimazione della magnitudo. Effettivamente si è trovata la seguente approssimazione per la magnitudo di un grafo G non pesato, connesso e con cicli disgiunti:

$$|G| = 1 + (N-1) \times m - \sum_{i=3}^{19} k_i \times c_i - K \times C$$

con k_i numero di cicli disgiunti di lunghezza i e K numero di cicli disgiunti di ordine maggiore o uguale a 20.

$$m = 0.46211715726001$$

$$c_3 = 0.19588366022253223$$

$$c_4 = 0.24856489022593742$$

$$c_5 = 0.3564796867175266$$

$$c_6 = 0.3926051408488065$$

$$c_7 = 0.44887194534939523$$

$$c_8 = 0.46890775207372837$$

$$c_9 = 0.4965015450088055$$

$$c_{10} = 0.5065344095286477$$

$$c_{11} = 0.5193928431833283$$

$$c_{12} = 0.5241029990091484$$

$$c_{13} = 0.529862449408891$$

$$c_{14} = 0.5319779099147368$$

$$c_{15} = 0.5344812466958899$$

$$c_{16} = 0.535401641814234$$

$$c_{17} = 0.5364650549831911$$

$$c_{18} = 0.536856179858562$$

$$c_{19} = 0.5372999725053464$$

$$C = 0.5374632219596034$$

Osservazione 2.3.5 *Se in partiolare G è un albero con N nodi (ossia G è non pesato, senza cicli e connesso), allora la sua mangitudo è :*

$$|G| = 1 + (N - 1) \times 0.46211715726001$$

Concludiamo il capitolo riportando un grafo (Figura 2.19) per il quale si è calcolata la magnitudo con la definizione e poi con l'approssimazione data dalla formula.

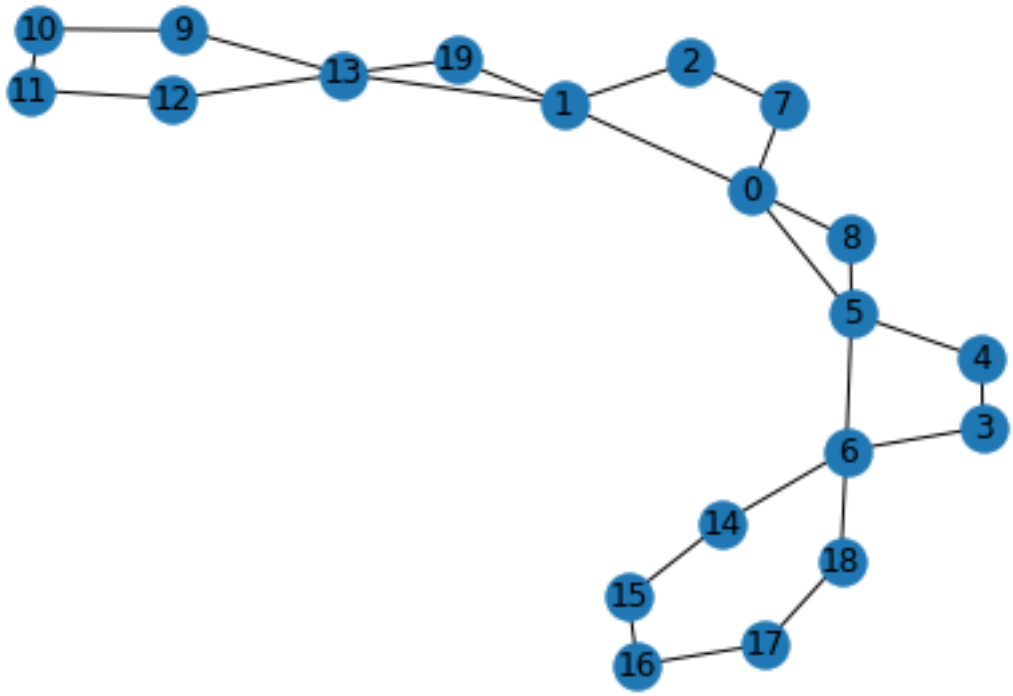


Figura 2.19: Grafo con 6 cicli di diverse lunghezze

Esempio 2.3.2

```
Cicli presenti nel grafo [[5, 8, 0], [14, 15, 16, 17,
18, 6], [4, 3, 6, 5], [1, 2, 7, 0], [13, 19, 1], [12,
11, 10, 9, 13]]
Lunghezza cicli presenti nel grafo [3, 6, 4, 4, 3, 5]
magnitude is: 8.142244059476914
formula: 8.142244059476917
```

Capitolo 3

Omologia della magnitudo

3.1 I gruppi di omologia della magnitudo

Nel seguito, per grafo G intenderemo quanto definito in 2.3. Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Definizione 3.1.1 *Siano $x_0, x_1, ..., x_k$ nodi di G. Indicheremo con $(x_0, ..., x_k)$ una successione formale di nodi del grafo, che chiameremo una tupla.*

Definizione 3.1.2 *La lunghezza di una tupla $(x_0, ..., x_k)$ è :*

$$\ell((x_0, ..., x_k)) = d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + ... + d(x_{k-1}, x_k)$$

Il nostro obiettivo ora è quello di definire dei gruppi liberi abeliani e delle mappe di bordo tra essi, in modo tale che la composizione di due mappe consecutive sia 0. In questo modo, costruiremo dei complessi di catene che ci permetteranno di avere una teoria omologica.
Questi gruppi che vogliamo definire, dipenderanno da k e da ℓ, rispettivamente il numero dei nodi del grafo coinvolti e la lunghezza della tupla definita dai $k + 1$ nodi che consideriamo.

Sia G un grafo.

Definizione 3.1.3 *Sia $MC_{k,l}(G)$ il gruppo libero abeliano generato dalle tuple $(x_0, ..., x_k)$, con $x_0, ..., x_k \in G$, tali che $x_i \neq x_{i+1}$ per ogni $i = 0, ..., k$ e tali che $\ell((x_0, ..., x_k)) = l$*

Definizione 3.1.4 *Sia $\partial_i : MC_{k,l}(G) \longrightarrow MC_{k-1,l}(G)$ tale che*

$$\partial_i(x_0, ..., x_k) := \begin{cases} (x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_k) & \text{se } \ell((x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_k)) = l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definiamo ora le mappe di bordo.

Definizione 3.1.5 *Sia* $\partial_{k,l} : MC_{k,l}(G) \longrightarrow MC_{k-1,l}(G)$ *con*

$$\partial_{k,l} = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \partial_i$$

Osservazione 3.1.1 *Se eliminassimo dalla* $k-$*tupla il primo elemento oppure l'ultimo elemento, di sicuro diminuirebbe la lunghezza della* $(k-1)-$*tupla risultante. Nella precedente definizione la somma va da* 1 *a* $k-1$ *anzichè da* 0 *a* k *proprio perchè le mappe* ∂_0 *e* ∂_k *darebbero sempre contributo nullo, dal momento che* $\ell(x_0, ..., x_k) > \ell(x_1, ..., x_k)$ *e* $\ell(x_0, ..., x_k) > \ell(x_0, ..., x_{k-1})$.

Abbiamo a disposizione i gruppi abeliani liberi $MC_{k,l}(G)$ e le mappe $\partial_{k,l}$ tra questi.
Fissando l, otteniamo il seguente diagramma:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+2,l}} MC_{k+1,l}(G) \xrightarrow{\partial_{k+1,l}} MC_{k,l}(G) \xrightarrow{\partial_{k,l}} MC_{k-1,l}(G) \xrightarrow{\partial_{k-1,l}} \cdots$$

In [5] (*Lemma 11*) viene dimostrato che $\partial_{k,l} \circ \partial_{k-1,l} = 0$, e pertanto $(MC_{*,l}, \partial_{*,l})$ è un complesso di catene. La notazione "$*, l$" indica che k varia mentre l è fissato.
Indichiamo con $H_k(MC_{*,l})$ il $k-$esimo gruppo di omologia derivante dal complesso di catene $(MC_{*,l}, \partial_{*,l})$. Definiamo quindi come segue i gruppi di omologia della magnitudo per G.

Definizione 3.1.6 *Il* $(k, l)-$*esimo gruppo di omologia della magnitudo per* G *è :*

$$MH_{k,l}(G) := H_k(MC_{*,l})$$

Osservazione 3.1.2 *possiamo equivalentemente definire* $MH_{k,l}(G)$ *come*

$$MH_{k,l}(G) = {}^{\ker \partial_{k,l}}/_{\operatorname{Im} \partial_{k+1,l}}$$

In generale avremo infiniti complessi di catene, ognuno in corrispondenza di un certo l fissato; fissati k e l, per ottenere $MH_{k,l}(G)$ considereremo il complesso di catene corrispondente a l e calcoleremo il $k-$esimo gruppo di omologia rispetto a quel preciso complesso di catene. Il seguente schema generale chiarirà la situazione.

$$\vdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+2,l-1}} MC_{k+1,l-1}(G) \xrightarrow{\partial_{k+1,l-1}} MC_{k,l-1}(G) \xrightarrow{\partial_{k,l-1}} MC_{k-1,l-1}(G) \xrightarrow{\partial_{k-1,l-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+2,l}} MC_{k+1,l}(G) \xrightarrow{\partial_{k+1,l}} MC_{k,l}(G) \xrightarrow{\partial_{k,l}} MC_{k-1,l}(G) \xrightarrow{\partial_{k-1,l}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+2,l+1}} MC_{k+1,l+1}(G) \xrightarrow{\partial_{k+1,l+1}} MC_{k,l+1}(G) \xrightarrow{\partial_{k,l+1}} MC_{k-1,l+1}(G) \xrightarrow{\partial_{k-1,l+1}} \cdots$$

$$\vdots$$

Definizione 3.1.7 *Sia $G = (V, E)$ un grafo. Il diametro di G, $diam(G)$, è*

$$\max_{x,y \in V} d(x, y)$$

Teorema 3.1.3 *Sia G un grafo e $MH_{k,l}(G) \neq 0$. Allora*

$$k \leq l.$$

Se $d = diam(G)$, allora

$$\frac{l}{d} \leq k.$$

Dimostrazione: Se $MH_{k,l}(G) \neq 0$ allora $MC_{k,l}(G) \neq 0$. Infatti se $MH_{k,l}(G) \neq 0$, allora $\partial_{k,l}$ non è l'applicazione banale e quindi deve essere $MC_{k,l}(G) \neq 0$. Pertanto esiste una tupla $(x_0, ..., x_k)$ che soddisfa

$$l = d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k).$$

Ora, $d(x_i, x_{i+1}) \geq 1$ per ogni $i = 0, ..., k-1$, dal momento che $x_i \neq x_{i+1}$. Quindi $l \geq k$.
Se G ha diametro d, allora $d(x_i, x_{i+1}) \leq d$ per ogni $i = 0, ..., k-1$, e pertanto $l \leq k\dot{d}$, da cui $\frac{l}{d} \leq k$. □

3.2 Omologia della magnitudo e cicli

In questa sezione si vuole indagare il significato geometrico dei gruppi di omologia della magnitudo $MH_{k,l}(G)$ e tentare di capire come essi cambiano, se cambia di poco il grafo G che consideriamo.
Tipicamente, si associa a ogni grafo G una tabella a due entrate dove in corrispondenza dell'entrata (k, l) troviamo il rango di $MH_{k,l}(G)$. Dal momento che l può essere arbitrariamente grande, avremmo delle tabelle infinite, di cui rappresenteremo una porzione.
Recentemente è stato dimostrato [7] come è fatta la struttura delle tabelle di rappresentazione per i grafi ciclici C_n e per gli alberi (quest'ultimo risultato in realtà era già noto a Hepworth e Willerton e dimostrato in [5]). Lo studio dei cicli è stato fatto in [7] utilizzando una teoria algebrica chiamata "Morse Theory". In [8] invece il problema del calcolo dei gruppi di omologia della magnitudo per G viene studiato in modo differente, usando i complessi simpliciali.

Nel Capitolo 1 si è visto che il $k-$esimo gruppo di omologia per un complesso simpliciale *conta* il numero di buchi $k-$dimensionali del complesso. Ci chiediamo se in qualche modo i gruppi di omologia della magnitudo per un grafo siano in grado di catturare la presenza di cicli di lunghezza l nel grafo. Per procedere, si è dovuta scegliere una strategia per incrementare il numero di cicli di un grafo: espandere un grafo in modo tale che contenga nuovi cicli è una operazione che può essere realizzata in molti modi, anche in dipendenza delle configurazione del grafo. Per poter procedere quantomeno a fare qualche verifica sperimentale abbiamo considerato una operazione di *unione* elementare, lavorando con grafi ciclici, e incollondoli fra loro nei vari modi combinatorialmente possibili, a seconda di quanti elementi vengono messi in condivisione (un vertice, un lato, due lati e così via). Una volta fatta questa operazione di unione, e calcolata per i nuovi grafi l'omologia della magnitudo, sarà possibile fare qualche osservazione.

Nel seguito indicheremo con C_n il grafo ciclico di ordine n. L'idea che sviluppiamo è la seguente: preso C_n, possiamo *unirlo* a un ciclo C_k, con $k \leq n$, facendo coincidere tra i due cicli j lati, con $0 \leq j \leq k-1$ se $k < n$ e $0 \leq j \leq k-2$ se $k = n$.
Preso C_n, indichiamo con "$\diamond$" l'operazione di *unione* tra il ciclo C_n e il ciclo C_k, con $k \leq n$; indicheremo tra parentesi il numero di archi che il ciclo C_k ha in comune con il ciclo C_n. Indicheremo il grafo risultante nel seguente modo:

$$C_n \diamond C_k(j)$$

con $k \leq n$ e $0 \leq j \leq k-1$ se $k < n$ e $0 \leq j \leq k-2$ se $k = n$.
Le figure 3.1, 3.2 e 3.3 riportate a fine sezione, riproducono gli effetti dell'operazione "$\diamond$" sui cicli di ordine 3, 4 e 5 rispettivamente, nelle casistiche possibili. In rosso sono evidenziati i lati comuni.
Per tutti i grafi in 3.1, 3.2, 3.3 si è calcolato $MH_{k,k}(G)$, con $k = 2, 3, 4, 5$ (si veda l'Appendice per i dettagli). A causa dei lunghi tempi di calcolo richiesti dal calcolatore si è scelto di computare la sola diagonale della tabella, usando i valori di k sopra riportati. La scelta della diagonale segue dal fatto che in questo modo siamo sicuri che i cicli di ordine 3, 4 e 5 vengano presi in considerazione.

C_3	$12, 24, 48, 96$		
$C_3 \diamond C_3(0)$	$24, 48, 96, 192$	$C_3 \diamond C_3(1)$	$24, 58, 140, 338$

Tabella 3.1: Ranghi di $MH_{k,k}$ con $k = 2, 3, 4, 5$ per le unioni su C_3.

C_4	$12, 16, 20, 24$				
$C_4 \diamond C_3(0)$	$24, 40, 68, 120$	$C_4 \diamond C_3(1)$	$22, 38, 66, 118$	$C_4 \diamond C_3(2)$	$24, 58, 140, 338$
$C_4 \diamond C_4(0)$	$24, 32, 40, 48$	$C_4 \diamond C_4(1)$	$22, 30, 38, 46$	$C_4 \diamond C_4(2)$	$22, 36, 56, 84$

Tabella 3.2: Ranghi di $MH_{k,k}$ con $k = 2, 3, 4, 5$ per le unioni su C_4.

C_5	$10, 10, 10, 10$				
$C_5 \diamond C_3(0)$	$22, 34, 58, 106$	$C_5 \diamond C_3(1)$	$20, 32, 56, 104$	$C_5 \diamond C_3(2)$	$22, 38, 66, 118$
$C_5 \diamond C_4(0)$	$22, 26, 30, 34$	$C_5 \diamond C_4(1)$	$20, 24, 28, 32$	$C_5 \diamond C_4(2)$	$18, 22, 26, 30$
				$C_5 \diamond C_4(3)$	$22, 38, 66, 118$
$C_5 \diamond C_5(0)$	$20, 20, 20, 20$	$C_5 \diamond C_5(1)$	$18, 18, 18, 18$	$C_5 \diamond C_5(2)$	$16, 16, 16, 16$
				$C_5 \diamond C_5(3)$	$18, 22, 26, 30$

Tabella 3.3: Ranghi di $MH_{k,k}$ con $k = 2, 3, 4, 5$ per le unioni su C_5.

Osservazione 3.2.1 *Sono evidenziati con colori diversi i grafi che sono isomorfi.*

Da questo studio, che vuole innanzitutto fungere da nuovo approccio allo studio dei gruppi di omologia della magnitudo, emergono i seguenti risultati:

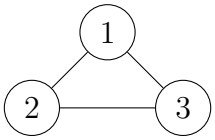
1. Per ogni $k = 2, 3, 4, 5$ valgono:

$$\begin{aligned}
a.\ & rk(MH_{k,k}(C_4 \diamond C_3(0))) = rk(MH_{k,k}(C_4 \diamond C_3(1))) + 2 \\
b.\ & rk(MH_{k,k}(C_4 \diamond C_4(0))) = rk(MH_{k,k}(C_4 \diamond C_4(1))) + 2 \\
c.\ & rk(MH_{k,k}(C_5 \diamond C_3(0))) = rk(MH_{k,k}(C_5 \diamond C_3(1))) + 2 \\
d.\ & rk(MH_{k,k}(C_5 \diamond C_4(0))) = rk(MH_{k,k}(C_5 \diamond C_4(1))) + 2 \\
& \qquad\qquad = rk(MH_{k,k}(C_5 \diamond C_4(2))) + 4 \\
e.\ & rk(MH_{k,k}(C_5 \diamond C_5(0))) = rk(MH_{k,k}(C_5 \diamond C_5(1))) + 2 \\
& \qquad\qquad = rk(MH_{k,k}(C_5 \diamond C_5(2))) + 4
\end{aligned}$$

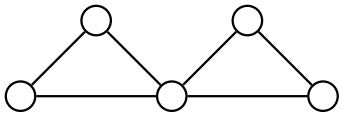
   I grafi che escludiamo corrispondono agli *ultimi* grafi che costruiamo quando aggiungiamo un ciclo di lunghezza k a C_n e abbiamo esaurito le possibilità di archi in comune.

2. Non sembra che l'omologia della magnitudo sia in grado di indiviuare la presenza di cicli all'interno del grafo. Se così fosse ci aspeteremmo di trovare dei cambiamenti diversi all'interno delle tabelle. Ad esempio, quando costruiamo $C_5 \diamond C_3(0)$ ci aspetteremmo una variazione del rango di $MH_{3,3}$ e nessun cambiamento negli altri ranghi, se $MH_{3,3}$ rilevasse la presenza di cicli di lunghezza 3.

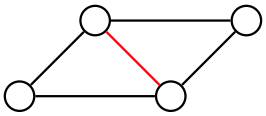
Un problema legato alla difficoltà di individuare i cicli può essere legato alla definizione di $MC_{k,l}$ (3.1.3), in quanto viene permessa la presenza multipla di uno stesso nodo nella tupla, e si evita la sola presenza consecutiva di uno stesso nodo. Consideriamo C_3



Nella notazione di tupla, il ciclo è rappresentato da $(1, 2, 3, 1)$, ossia una tupla di lunghezza 3. Questa tupla è un elemento di $MC_{3,3}$ (ricordiamo che k indica che consideriamo $k + 1$ nodi nella tupla).
Osserviamo immediatamente che si ha anche $(1, 2, 3, 2), (1, 2, 1, 2) \in MC_{3,3}$. Questi ultimi, non rappresentano un ciclo in C_3; in un certo senso quindi non sorprende che non sia immediato individuare i cicli in un grafo usando l'omologia della magnitudo.

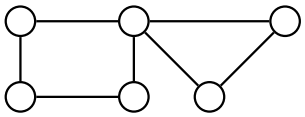


(a) $C_3 \diamond C_3(0)$

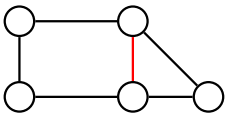


(b) $C_3 \diamond C_3(1)$

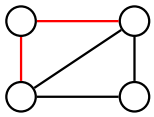
Figura 3.1: Unioni su C_3



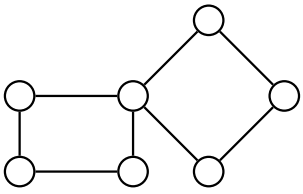
(a) $C_4 \diamond C_3(0)$



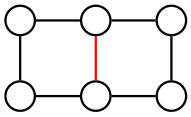
(b) $C_4 \diamond C_3(1)$



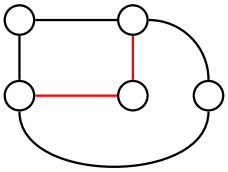
(c) $C_4 \diamond C_3(2)$



(d) $C_4 \diamond C_4(0)$

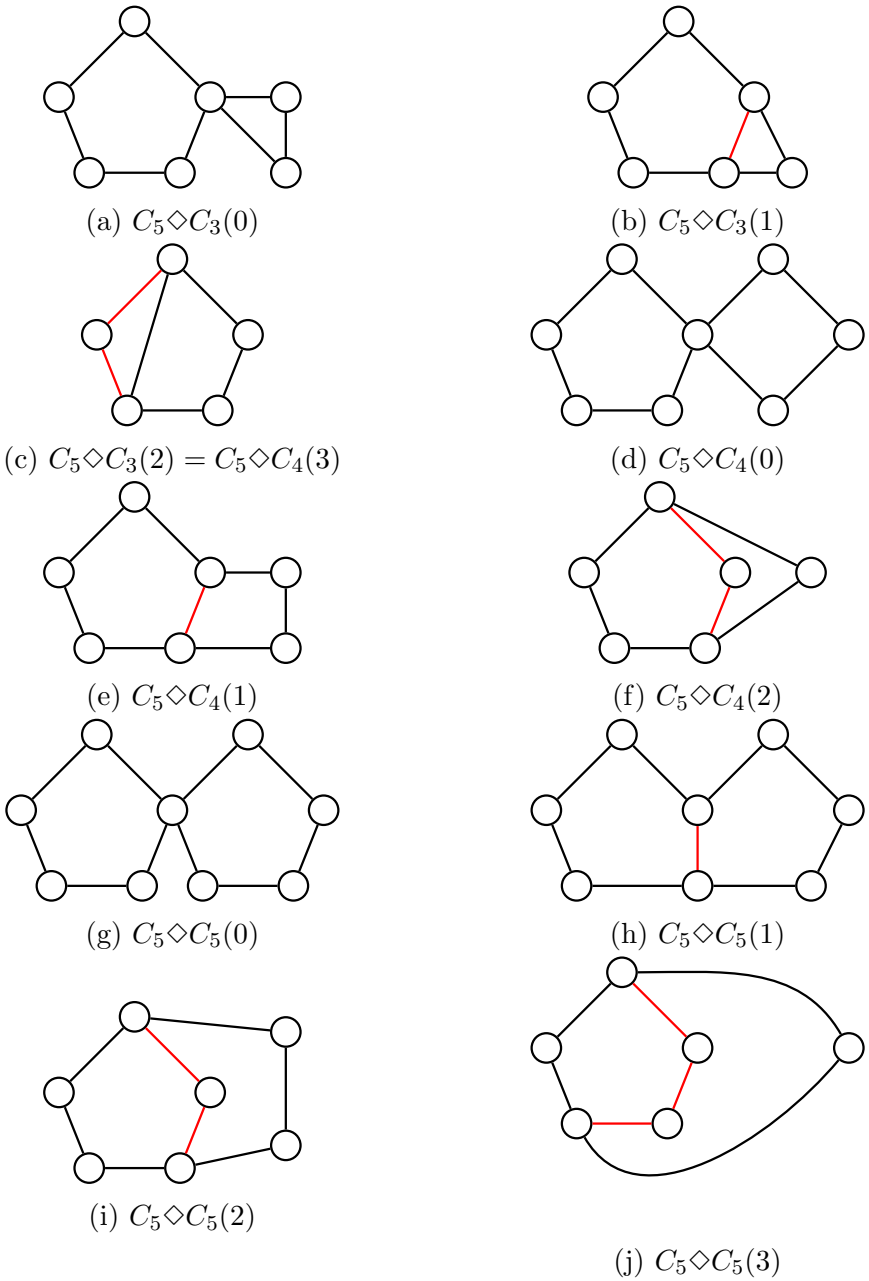


(e) $C_4 \diamond C_4(1)$



(f) $C_4 \diamond C_4(2)$

Figura 3.2: Unioni su C_4



(a) $C_5 \diamond C_3(0)$ (b) $C_5 \diamond C_3(1)$

(c) $C_5 \diamond C_3(2) = C_5 \diamond C_4(3)$ (d) $C_5 \diamond C_4(0)$

(e) $C_5 \diamond C_4(1)$ (f) $C_5 \diamond C_4(2)$

(g) $C_5 \diamond C_5(0)$ (h) $C_5 \diamond C_5(1)$

(i) $C_5 \diamond C_5(2)$ (j) $C_5 \diamond C_5(3)$

Figura 3.3: Unioni su C_5

Conclusioni

In quest'ultima sezione riassumiamo i risultati ottenuti e i contenuti trattati in questo elaborato.

1. Dopo aver introdotto la magnitudo per un spazio metrico, fornendo gli esempi necessari alla comprensione del suo potente significato geometrico, abbiamo introdotto la magnitudo per grafi.

2. È stata dimostrata la biiezione esistente tra gli insiemi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{M}$ definiti nel teorema 2.3.2; ciò fornisce un metodo per associare un numero a un grafo e grazie a questo si è osservata un'importante proprietà asintotica della magnitudo legata alla presenza di cicli in un grafo.

3. È stata proposta un'approssimazione, ottenuta numericamente, per calcolare direttamente la magnitudo di un grafo avente cicli disgiunti.

4. Sono stati introdotti i gruppi di omologia della magnitudo con l'ausilio di un parallelismo con la teoria omologica per complessi simpliciali, al fine di rendere più naturale la loro comprensione.

5. Si è studiato il comportamento dei gruppi di omologia della magnitudo per alcuni grafi. In particolare è stato introdotto un possibile nuovo approccio al problema che prevede lo studio delle *unioni* successive di grafi ciclici. Si è ipotizzato che caratterizzare i cicli all'interno di un grafo attraverso i gruppi di omologia della magnitudo sia problematico.

Domande aperte Restano interessanti le seguenti questioni da approfondire, che possono portare ulteriori risultati.

1. Cosa rappresenta la funzione magnitudo, introdotta per spazi metrici, quando applicata a uno spazio metrico indotto da un grafo non pesato? È possibile classificare classi di grafi in base a proprietà di questa funzione?

2. È possibile trovare delle formule per classificare i grafi isomorfi ottenuti col metodo delle *unioni*? Questo permetterebbe di rappresentare grafi complessi come unioni di grafi più semplici e in particolare ciò semplificherebbe il calcolo dei gruppi di omologia della magnitudo.

3. Resta senza risposta la questione su quale proprietà rappresentino i gruppi di omologia della magnitudo.

Riservo queste ultime righe per ringraziare tutti i compagni e i docenti che mi hanno accompagnato durante i tre anni che qui formalmente si concludono, non senza un velo di malinconia. Ringrazio in particolare il professor Manzoni e Giuliamaria Menara per avermi seguito in questo lavoro e aiutato a comprendere i meccanismi della ricerca scientifica. Un ultimo ringraziamento a chi mi è stato vicino in questi tre anni: Emma, papà , mamma, Elena.

Michele

Appendice

Codice per calcolare il rango dei gruppi di omologia della magnitudo dati k, l.

Componenti connesse del grafo

```
import numpy as np
import networkx as nx
import itertools

def bdry(G,k: int,l: int,):
    vtx_connected_component = []
        for v in nx.connected_components(G):
            vtx = list(v)
            vtx_connected_components.append(vtx)
```

Definiamo la funzione **bdry**, che prende in input il grafo G (che è un oggetto **nx.Graph()**) su cui vogliamo operare e k ed l, due interi.
Utilizziamo **nx.connected_components()** per ottenere le componenti connesse del grafo G. Ogni elemento di questo oggetto viene trasformato in una *python list*, e quindi aggiunto alla lista delle componenti connesse inizializzata fuori dal ciclo **for**. Ogni componente connessa in **vtx_connected_component** è rappresentata da una lista dei nodi che le appartengono.

Calcolo dei generatori di $MC_{k,l}$

```
MC_kl = []
 for c in vtx_connected_c:
        for pc in itertools.product(c, repeat=k + 1):
            is_seq = True
            for i in range(k):
                if pc[i] == pc[i + 1]:
                    is_seq = False
                    break
```

```
9               if is_seq:
10                  length = 0
11                  for i in range(k):
12                      length += nx.shpl(G, pc[i],
13                      pc[i + 1])
14                      if length > l:
15                          break
16                  if length == l:
17                      MC_kl.append(pc)
18
19      MC_kl.sort()
```

Qui "c=component", "pc=possible chain", "shpl=shortest_path_length".
Nel ciclo **for** più esterno, che inizia a riga 2, consideriamo ogni componente connessa del grafo. Fissata una componente connessa, consideriamo tutte le possibili $(k+1)-$uple (ammettendo la ripetizione di elementi) ottenibili coi nodi presenti nella componente connessa fissata. Questo passaggio è fatto con **itertools.product()**.
Col ciclo **for** di riga 3, fissiamo una $(k+1)-$upla ottenuta con **itertools.product()**. Dobbiamo verificare che questa $(k+1)-$upla:

1. non abbia due nodi uguali consecutivi al suo interno
2. rappresenti una tupla di lunghezza l

Per verificare 1 usiamo il ciclo **for** di riga 5: appena troviamo due elementi della $(k+1)-$upla uguali e consecutivi, poniamo **is_seq = False**; **is_seq** è una variabile di controllo che usiamo per eliminare le $(k+1)-$uple che non rispettano 1.
Per verificare 2 anzitutto inizializziamo la variabile **length=0** a riga 10 e poi usiamo il ciclo **for** a riga 11. Selezioniamo ogni elemento della $(k+1)-$upla partendo dal primo e calcoliamo la distanza tra questo nodo e il nodo successivo nella $(k+1)-$upla. Il calcolo della distanza è stato fatto usando **nx.shortest_path_length()**. Sommiamo la distanza ottenuta alla variabile **length**. Non appena **length** è maggiore di l, di sicuro la $(k+1)-$upla avrà lunghezza maggiore di l e pertanto verrà scartata. Se arriviamo alla fine del ciclo a riga 11 e se **length=l**, aggiungiamo la $(k+1)-$upla a **MC_kl**, che rappresenta i generatori di $MC_{k,l}$.
Il calcolo dei generatori per $MC_{k-1,l}$ è analogo al precedente, quindi omesso.

Mappa di bordo

```
1  if len(MC_k_1l)==0:
2          bdry_mtx = np.zeros((1, len(MC_kl)))
3      elif len(MC_kl)==0:
4          bdry_mtx = np.zeros((len(MC_k_1l), 1))
5      else:
6          bdry_mtx = np.zeros((len(MC_k_1l),len(MC_kl)))
7
8      for k_ch_idx in range(len(MC_kl)):
9          k_ch = MC_kl[k_ch_idx]
10         for v_idx in range(1, len(k_ch) - 1):
11             if nx.shpl(G,k_ch[v_idx-1],k_ch[v_idx+1])
12             ==
13             nx.shpl(G,k_ch[v_idx - 1],k_ch[v_idx]) +
14             nx.shpl(G, k_ch[v_idx], k_ch[v_idx + 1]):
15                 if tuple(np.delete(np.array(k_ch),
     v_idx)) in MC_k_1l:
16                 bdry_mtx[MC_k_1l.index(tuple(np.delete
     (np.array(k_ch),v_idx))), k_ch_idx]=(-1)**v_idx
17
18
19 return bdry_mtx
```

Qui "shpl = shortest_path_length".
Le righe dalla 1 alla 6 servono per definire la matrice **bdry_mtx**. Con il ciclo **for** di riga 8, scansioniamo la lista delle $(k+1)-$uple: per ogni indice, salviamo nelle variabile **k_ch** la $(k+1)-$upla che si trova in corrispondenza di quell'indice nella lista **MC_kl**. Ora lavoriamo su questa $(k+1)-$upla; consideriamo l'elemento di indice 1, che corrisponde al secondo elemento della $(k+1)-$upla: se rimuovendo questo elemento, cambia la lunghezza della $k-$upla risultante, allora la $(k+1)-$upla che stiamo considerando non ci interessa. Altrimenti, verifichiamo che la $k-$upla risultante sia un elemento di **MC_k_1l** (che rappresenta i generatori di $MC_{k-1,l}$). Se la $k-$upla è un elemento di **MC_k_1l**, allora poniamo uguale a -1 l'entrata corrispondente di **bdry_mtx**. Ripetiamo il ragionamento rimuovendo l'elemento di indice 2, e così via fino all'indice k.
Tutto questo è realizzato con il ciclo **for** di riga 10 e con i due controlli **if** successivi, il primo dei quali utilizza il metodo **nx.shortest_path_length()** per verificare la condizione sulla lunghezza delle tuple.

Calcolo del rango del gruppo di omologia della magnitudo di ordine k, l.

```
1 from numpy.linalg import matrix_rank
2
3 d_kl= bdry(G, k, l)
4 d_kplus1_l= bdry(G, k+1, l)
5
6 dim_kernel = d_kl.shape[1]- matrix_rank(d_kl)
7 dim_image = matrix_rank(d_kplus1_l)
8 MC_k,l = dim_kernel - dim_image
```

La matrice **bdry_mtx** definita al passo precedente rappresenta di fatto le mappe di bordo. Usiamo **matrix_rank()** per calcolare il rango di una matrice; nel nostro caso il rango corrisponde alla dimensione dell'immagine della mappa che stiamo rappresentando con **bdry_mtx**.
A riga 3 e riga 4 calcoliamo le matrici che rappresentano le mappe di bordo necessaria a computare il rango del gruppo di omologia della magnitudo di ordine k, l.
A riga 6 implentiamo il noto teorema della dimensione per applicazioni lineari per ottenere la dimensione del nucleo della mappa che ci interessa; a riga 7 otteniamo la dimensione dell'immagine della mappa che ci interessa.
A riga 8 otteniamo il rango del gruppo di omologia della magnitudo di ordine k, l come differenza tra la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine delle opportune mappe di bordo.

Codice per calcolare la magnitudo di un grafo G

```
1  import networkx as nx
2  from math import inf
3  import numpy as np
4
5  Z = nx.to_numpy_array(G)
6
7  n_nodes = len(Z)
8
9  for i in range(n_nodes):
10     for j in range(n_nodes):
11         if i != j and Z[i][j]==0:
12             Z[i][j] = inf
13
14 for k in range(n_nodes):
15     for i in range(n_nodes):
16         for j in range(n_nodes):
17             if Z[i][j]>Z[i][k] +Z[k][j]:
18                 Z[i][j] = Z[i][k] + Z[k][j]
19
20 Z=np.exp(-Z)
21
22  sum(sum(np.linalg.inv(Z)))
```

Grazie a **nx.to_numpy_array()** otteniamo Z matrice di adiacenza del nostro grafo G (che è un oggetto **nx.Graph()**). Salviamo poi il numero di nodi nella variabile **n_nodes**.
I due cicli **for** di riga 9 e 14 servono a implementare Algoritmo 1 per ottenere la matrice delle distanze. A riga 20, grazie al comando **np.exp()**, esponenziamo ogni coefficiente della matrice delle distanze cambiato di segno, e infine invertiamo questa matrice (**np.linalg.inv(Z)**). Per ottenere la magnitudo di G (riga 22), sommiamo tutti i coefficienti dell'inversa.

Bibliografia

[1] James R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology, Capa.1,* Massachusetts Institute of Technology, Addison-Wesley Publishing Company, **ISBN 0-201-04589-9**, (1984).

[2] Robin J. Wilson, *Introduction to Graph Theory,* Addison-Wesley Longman Limited , **ISBN 0-582-24993-7**, (1996).

[3] Tom Leinster, *The Magnitude of Metric Spaces,* **arXiv: 1012.5857v3**, (2011).

[4] Tom Leinster, *The Magnitude of a Graph,* **arXiv: 1401.4623v2**, (2014).

[5] Richard Hepworth and Simon Willerton, *Categorifying the Magnitude of a Graph,* **arXiv: 1505.04125v2**, (2015).

[6] Joseph Rotman, *Galois Theory,* **ISBN 0-387-98541-7**, (1990).

[7] Yuzhou Gu, *Graph Magnitude Homology via Algebraic Morse Theory,* **arXiv: 1809.07240v1**, (2018).

[8] Yasushiko Asao and Kengo Izumihara, *Homology, Homotopy and Applications, vol.23(1), 2021, pp. 297-310,* **ISSN Print 1532-0073 ISSN Online 1532-0081**, (1990).